Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки" по математике
(финальный тур)
Вариант 1

9 класс.

1. Квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет корней. Докажите, что если $a+c<b$, то числа a и c отрицательны.

Указание. По условию, график параболы $y=ax^2+bx+c$ не пересекается с осью Ox. Поскольку $a+c<b$, то $y(-1)=a-b+c<0$. Значит, ветви параболы направлены вниз и $y(0)<0$, т.е. $a<0$ и $c<0$.

Другое решение. Из неравенства $D=b^2-4ac<0$ следует, что a и c одного знака. Если предположить, от противного, что $a>0$ и $c>0$, то возведя в квадрат неравенство $0<a+c<b$, получим $b^2>a^2+c^2+2ac\ge 2ac+2ac=4ac$, т.е. дискриминант $b^2-4ac>0$. Противоречие.

2. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр (в десятичной записи) натурального числа n. Найдите все натуральные n, для которых $n+s(n)=2011$.

Ответ: 1991**. Указание.** Поскольку $n<2011$, то $s(n)\le 2+9+9+9=29$. Значит, $n=2011-s(n)\ge 1982$. Поскольку числа $n=2011$ и $n=2010$, очевидно, не подходят, то для первых трех цифр числа n могут быть три возможности: 198, либо 199, либо 200. Пусть последняя (четвертая) цифра числа n равна x. Тогда в каждом из указанных случаев получим уравнение: либо 1) $1980+x+18+x=2011$, либо 2) $1990+x+19+x=2011$, либо 3) $2000+x+2+x=2011$. Только во втором случае уравнение имеет целочисленное решение, а именно, $x=1$.

3. Рёбра куба занумеровали числами от 1 до 12 и затем для каждой грани подсчитали сумму номеров на рёбрах данной грани. Докажите, что найдется грань, у которой эта сумма меньше 27.

Указание. Подсчитаем на каждой грани соответствующую сумму и затем сложим эти суммы для всех шести граней. Получим в результате $(1+2+\ldots+12)\cdot 2$, так как при таком подсчете любое ребро будет считаться дважды. Итак, получаем общую сумму 156, и тогда хотя бы для одной грани ее сумма номеров не превосходит $\frac{156}{6}=26$. (Действительно, в противном случае мы получили бы общую сумму не меньше $27\cdot 6>156$).

4. В треугольнике ABC угол A равен 60^0, расстояния от вершин B и C до центра вписанной окружности треугольника ABC равны, соответственно, 3 и 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ. $\sqrt{\frac{37}{3}}$. **Указание.** Пусть O – центр вписанной окружности. Тогда $\angle OBC+\angle BCO$ $=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\frac{1}{2}\cdot 120^\circ=60^\circ$, и поэтому $\angle BOC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. По теореме косинусов получим $BC^2=BO^2+OC^2-2BO\cdot OC\cdot\cos\angle BOC=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot(-0{,}5)=$ 37. Поэтому для радиуса R описанной окружности треугольника ABC будем иметь $2R\sin 60^\circ=\sqrt{37}$. Отсюда $R=\sqrt{37/3}$.

5. Единичный квадрат первой четверти на координатной плоскости ($0 \le x, y \le 1$) разбит на квадратики со стороной $2 \cdot 10^{-4}$. Сколько узлов этого разбиения (внутри единичного квадрата) лежит на параболе $y = x^2$?

Ответ. 49. **Указание.** Узлы разбиения имеют координаты вида (i/5000, j/5000), где i, j = 1,2,…,4999. Условие того, что данный узел лежит на параболе, есть $\frac{j}{5000} = \left(\frac{i}{5000}\right)^2$, т.е. $i^2 = j \cdot 5^4 \cdot 2^3$. Значит, номер i должен иметь вид $i = 5^2 \cdot 2^2 \cdot k = 100k$, где k – любое натуральное число, меньшее $\frac{5000}{100} = 50$.

Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки" по математике (финальный тур)
Вариант 2

9 класс

9.1. Даны три положительных числа, обладающих тем свойством, что произведение любых двух из них больше третьего на одно и то же число *a*. Докажите, что $a \ge -\frac{1}{4}$.

Указание. Пусть x,y,z – данные числа. Имеем 3 уравнения: $xy = z + a$, $yz = x + a$, $xz = y + a$. Вычитая из первого уравнения второе, получим, что либо $z = x$, либо $y = -1$. В силу положительности исходных чисел имеем $z = x$. Аналогично, используя третье уравнение, получим: $x = y = z$. Тогда получаем квадратное уравнение $x^2 - x - a$, дискриминант которого $(1 + 4a)$ должен быть ≥ 0, т.е. $a \ge -\frac{1}{4}$.

9.2. Биссектрисы внешних углов *B* и *C* треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. а) Может ли угол *BMC* быть тупым? б) Найдите угол *BAC*, если известно, что $\angle BMC = \frac{\angle BAM}{2}$.

Ответ: а) не может; б) 120°. **Указание.** Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Тогда $\angle BMC = 180° - \left(\frac{180° - \beta}{2} + \frac{180° - \gamma}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. а) Значит, угол *BMC* не может быть тупым. б) из уравнения $\frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{4}$ получаем значение $\alpha = 120°$ (здесь мы использовали тот факт, что точка *M* обязана лежать на биссектрисе угла *A*).

9.3. Докажите, что из любых 2600 целых чисел можно выбрать два таких числа, что их разность делится на все натуральные числа до 10 включительно.
Указание. Заметим, что НОК $(1,2,3,\ldots,10) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Значит, из 2600 чисел можно выбрать хотя бы два, имеющих одинаковые остатки при делении на 2520. Тогда разность этих чисел делится на 1,2, …,10.

9.4. Для четырехугольника *ABCD,* вписанного в окружность радиуса *R*, выполняется. $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$. Можно ли утверждать, что хотя бы одна из диагоналей *ABCD* является диаметром окружности?
Ответ: нет. **Указание.** Достаточно рассмотреть четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, отличными от диаметров. К этому решению можно прийти, если ввести угловые величины дуг α, β, γ, δ, на которые разбивается окружность, и тогда

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4R^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\delta}{2}\right).$$

В скобках число 2 получается не только в случае, когда $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$, но и в случае, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

9.5. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа *n*. Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению $s(1) \cdot s(2) \cdot \ldots \cdot s(100)$?
Ответ: 19-ю нулями. **Указание.** Рассмотрим числа из первой сотни, для которых сумма цифр делится на 5. Такие числа имеют сумму цифр либо 5, либо 10, либо 15. Чисел с суммой 5 всего 6: это 5, 14, 23, 32, 41, 50. Чисел с суммой цифр 10 всего 9: это 19, 28, …, 91. Чисел с суммой

цифр 15 всего 4: это 69, 78, 87, 96. Таким образом, в произведении $P = s(1) \cdot s(2) \cdot \ldots \cdot s(100)$ множитель 5 содержится в 19-й степени. А множитель 2 в P содержится в (гораздо) большей степени (достаточно рассмотреть, например, числа с суммой цифр 8; имеется 9 таких чисел, и каждое вносит в P множитель 2^3, поэтому двойка содержится в P в степени $\geq 3 \cdot 9 = 27$). Итак, P оканчивается на 19 нулей